Statistische Physik

Prof. Dr. Kurt Busch

SoSe 2017, Blatt 11a
27. Juni 2017

---

1. Boltzmann-Gleichung in Relaxationszeitnäherung (2+4+3+4 Punkte)

In einem Metall (Volumen V) befinden sich N nicht-wechselwirkende Elektronen, die der Dispersionrelation $\epsilon(\vec{p}) = p^2/2m$ unterliegen. Im Gleichgewicht lautet die Verteilungsfunktion

$$f^{(0)}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{1}{e^{(\epsilon(\vec{p})-\mu)/kT} + 1}.$$

Wird das Gleichgewicht durch ein zeitunabhängiges elektrisches Feld $\vec{E}$, ein zeitunabhängiger Temperaturgradient $\vec{\nabla}T$ und/oder einen zeitunabhängigen Gradienten des chemischen Potential $\vec{\nabla}\mu$ gestört, so ist die resultierende stationäre Verteilungsfunktion $f(\vec{p}, \vec{r})$ bestimmt durch die Lösung der stationären Boltzmann-Gleichung

$$\frac{\vec{p}}{m} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{p}, \vec{r}) - e\vec{E} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{p}} f(\vec{p}, \vec{r}) = I,$$

wobei e die elektrische Ladung ist und das Stossintegral I in der sogenannten Relaxationszeitnäherung gegeben ist durch

$$I = -\frac{1}{\tau} \left[f(\vec{p}, \vec{r}) - f^{(0)}(\vec{p}, \vec{r}) \right].$$

Dabei ist τ die Relaxationszeit, die die mittlere Zeit zwischen zwei Stössen eines Elektronen an Störstellen im Metall beschreibt.
Im folgenden werden die Teilchendichte $n(\vec{r})$, die elektrische Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ und die thermische Stromdichte $\vec{j}_Q(\vec{r})$

$$\begin{aligned}
n(\vec{r}) &= 2 \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3} f(\vec{p}, \vec{r}), \\
\vec{j}(\vec{r}) &= -2e \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\vec{p}}{m} f(\vec{p}, \vec{r}), \\
\vec{j}_Q(\vec{r}) &= 2 \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\vec{p}}{m} \left(\epsilon(\vec{p}) - \mu\right) f(\vec{p}, \vec{r}),
\end{aligned}$$

betrachtet, wobei der Faktor 2 den Spin der Elektronen berücksichtigt.

– bitte wenden –

(a) Zeigen Sie, dass im Gleichgewicht ohne elektrisches Feld gilt: $\vec{j}^{(0)}(\vec{r}) = 0$, $\vec{j}_Q^{(0)}(\vec{r}) = 0$, und $n^{(0)}(\vec{r}) = N/V$.

(b) In der Gegenwart der o.g. Felder bzw. Gradienten wird nun $f(\vec{p}, \vec{r}) = f(\vec{p}, T(\vec{r}), \mu(\vec{r}))$. Bestätigen Sie, daß in *linearer Ordnung*, d.h. $\sim \vec{E}$, $\sim \vec{\nabla} T$ und $\sim \vec{\nabla}\mu$, gilt

$$f(\vec{p}, \vec{r}) = f^{(0)}(\vec{p}, \vec{r}) + \tau \left(-\frac{\partial f^{(0)}(\epsilon(\vec{p}))}{\partial \epsilon} \right) \frac{\vec{p}}{m} \cdot \left[-e\vec{E} - \vec{\nabla}\mu - \frac{\epsilon(\vec{p}) - \mu}{T} \vec{\nabla} T \right].$$

(c) Die elektrische Leitfähigkeit σ ist definiert via $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ für $\vec{\nabla} T = \vec{\nabla}\mu = 0$. Wählen Sie $\vec{E}, \vec{j} \parallel \hat{e}_z$. Berechnen Sie $\vec{j} = j\hat{e}_z$ aus (b) in führender Ordnung in T und zeigen Sie, dass gilt

$$\sigma = \frac{n^{(0)} e^2 \tau}{m} \quad \text{(Drude-Leitfähigkeit).}$$

(d) Die thermische Leitfähigkeit κ bestimmt sich (näherungsweise) aus $\vec{j}_Q = -\kappa \vec{\nabla} T$ für $\vec{E} = \vec{\nabla}\mu = 0$. Wählen Sie $\vec{j}_Q, \vec{\nabla} T \parallel \hat{e}_z$. Berechnen Sie $\vec{j}_Q = j_Q \hat{e}_z$ aus (b) in führender Ordnung in T und zeigen Sie (k: Boltzmannkonstante), dass gilt

$$\kappa = \frac{\pi^3}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 \sigma T \quad \text{(Wiedemann-Franz-Gesetz).}$$

Hinweis: Es gilt (siehe Sommerfeld-Entwicklung)

$$\int d\epsilon \, A(\epsilon) \left(-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial \epsilon} \right) = A(\mu) + A''(\mu) \frac{\pi^2}{6} (kT)^2, \quad \mu(T) = \epsilon_F + O(T^2),$$

wobei ϵ_F die Fermi-Energie bezeichnet.