Statistische Physik

Prof. Dr. Kurt Busch

SoSe 2017, Blatt 13a
11. Juli 2017

---

1. Spin-Wellen (1+3+3+3+2 Punkte)

Das ferromagnetische Heisenberg-Modell für N Spins der Länge S ohne äußeres Magnetfeld lautet

$$\hat{H} = -\sum_{i,j;i\neq j} J(|\vec{R}_i - \vec{R}_j|)\, \hat{\vec{S}}_i \cdot \hat{\vec{S}}_j \quad \text{mit } \left[\hat{\vec{S}}_i, \hat{\vec{S}}_j\right]_{i\neq j} = 0,$$
$$\hat{\vec{S}}_i^2 = \hbar^2 S(S+1).$$

Dabei bezeichnen die Ortsvektoren $\vec{R}_1, ..., \vec{R}_N$ die Positionen der Spins auf dem Gitter. Dieses Gitter soll einfach kubisch sein, d.h. es besteht aus Würfeln der Kantenlänge a, nimmt ein Volumen $V = Na^3$ ein und in alle drei Raumrichtungen werden periodische Randbedingungen angenommen. Die Stärke der Wechselwirkung zwischen zwei Spins, $J(|\vec{R}|)$, hängt vom Abstand der Spins ab.

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für einen Spin im Heisenberg-Bild lautet

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\vec{S}}_i(t) = \sum_{j\neq i} J(|\vec{R}_i - \vec{R}_j|)\hat{\vec{S}}_i(t) \times \hat{\vec{S}}_j(t)$$

(b) In der ferromagnetisch geordneten Phase sind alle Spins in die positive z-Richtung ausgerichtet, d.h. für $T \to 0$ darf man den Operator $\hat{S}^z$ durch seinen maximalen Eigenwert ersetzen, also $\hat{S}_i^z \to \hbar S$ für alle i. Stellen Sie mit Hilfe der kanonischen Transformation (Gitter-Fourier-Transformation)

$$\hat{S}_j^\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}} \hat{S}^\mu(\vec{q}, t) e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}_j},$$

linearisierte Bewegungsgleichungen für $\hat{S}^x(\vec{q}, t)$ und $\hat{S}^y(\vec{q}, t)$ auf. Dabei werden Sie auf die Dispersionsrelation $\hbar\Omega(\vec{q})$ der Spin-Wellen geführt:

$$\hbar\Omega(\vec{q}) = \hbar S \left(\tilde{J}(0) - \tilde{J}(\vec{q})\right) \quad \text{mit } \tilde{J}(\vec{q}) = \sum_l J(\vec{R}_l) e^{-i\vec{q}\cdot\vec{R}_l}.$$

(c) Verwenden Sie die Ergebnisse aus (b) um zu prüfen, ob die Leiter-Operatoren $\hat{S}^\pm(\vec{q}) = \hat{S}^x(\vec{q}) \pm \hat{S}^y(\vec{q})$ als Erzeuger bzw. Vernichter elementarer Oszillator-Anregungen ('Spin-Wellen') fungieren:

$$\hat{S}_i^z = \hbar S \to \quad \begin{array}{rcl} [\hat{a}_{\vec{q}}, \hat{H}] &=& +\hbar\Omega(\vec{q})\, \hat{a}_{\vec{q}} \\ [\hat{a}_{\vec{q}}^\dagger, \hat{H}] &=& -\hbar\Omega(\vec{q})\, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger \end{array} .$$

Dabei ist

$$[\hat{a}_{\vec{q}}, \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}] = 1, \quad \hat{a}^\dagger_{\vec{q}} = \frac{\hat{S}^+(\vec{q})}{\sqrt{2S}\,\hbar}, \quad \hat{a}_{\vec{q}} = \frac{\hat{S}^-(-\vec{q})}{\sqrt{2S}\,\hbar}.$$

Hinweis: Es gilt (inverse Gitter-Fourier-Transformation)

$$\hat{S}^\mu(\vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \hat{S}^\mu_j e^{-i\vec{q}\cdot\vec{R}_j}.$$

Verwenden Sie diese Relation zur Umschreibung des Hamilton-Operators.

(d) Machen Sie sich einen Spin-Welle anschaulich klar, indem Sie einen 1-Spin-Wellen-Zustand $|\phi_1(\vec{q})\rangle = \hat{a}^\dagger_{\vec{q}}|\phi_0\rangle$ explizit angeben. Stellen Sie dazu zunächst den normierten ferromagnetischen Grundzustand (Produktzustand) $|\phi_0\rangle$ mit $\hat{S}^z_i|\phi_0\rangle = \hbar S\,|\phi_0\rangle$ für alle i auf. Bstimmen Sie folgende Matrixelemente

$$\langle\phi_1(\vec{q})|\phi_1(\vec{q})\rangle,\ \langle\phi_0|\phi_1(\vec{q})\rangle,\ \langle\phi_0|\hat{S}^z_i|\phi_0\rangle,\ \langle\phi_1(\vec{q})|\hat{S}^z_i|\phi_1(\vec{q})\rangle,\ \text{für beliebiges } i.$$

(e) Berechnen Sie $\Omega(\vec{q})$ für eine Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn im kubischen Gitter, d.h. $J(|\vec{R}_l|) = J$ für $\vec{R}_l = a(n_x, n_y, n_z)$ mit $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ (es gilt $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$) sowie $J(|\vec{R}_l|) = 0$ für alle anderen $\vec{R}_l$. Was ergibt sich für kleine Wellenvektoren $qa \ll 1$?