Statistische Physik

Prof. Dr. Kurt Busch

SoSe 2017, Blatt 5a
16. Mai 2017

---

1. Paramagnetismus lokalisierter Spins (2+3+2 Punkte)

Auf einem Kristallgitter seien N identische und nichtwechselwirkende Atome fixiert, wobei jedes Atom über eine nicht-abgeschlossene elektronische Schale verfüge, die einen Gesamtdrehimpuls J aufweist. In einem extern angelegten (statischen) Magnetfeld $\vec{B} = B\hat{e}_z$ hat also jedes einzelne Atom i die Energie $\epsilon_i = -m_i\,\mu_B B$, wobei $m_i = -J, -J+1, ..., J-1, J$ ist (μ_B bezeichnet das Bohrsche Magneton).

(a) Geben Sie die Mikrozustände $\{\alpha\}$ und die zugehörigen Energien E_α an. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme.

(b) Die Magnetisierung M ist definiert durch

$$M(T, B, N) = \langle m_1 + m_2 + ... + m_N \rangle.$$

Zeigen Sie, dass $M = N\langle m_1\rangle$, und berechnen Sie $\langle m_1\rangle$ als Funktion von $\mu_B B/kT$.

(c) Bestimmen Sie Näherungsausdrücke für M für kleine Magnetfelder $\mu_B B/kT \ll 1$ und große Magnetfelder $\mu_B B/kT \gg 1$. Berechnen Sie die Nullfeld-Suszeptibilität

$$\chi(T, N) = \lim_{B\to 0}\left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_T.$$

Hinweis:

$$1 + x + x^2 + ... + x^p = \frac{1 - x^{(p+1)}}{1 - x}$$

– bitte wenden –

2. Ideales Boltzmann-Gas (2+2 Punkte)

In einem Würfel mit Volumen $V = L^3$ befindet sich ein Teilchen mit der Dispersionrelation $\epsilon(\vec{k}) = \hbar^2 k^2/2m$ unter periodischen Randbedingungen.

(a) Zeigen Sie:

$$k_\mu = \frac{2\pi}{L} n_\mu \quad \text{mit } \mu = x, y, z \quad \text{und } n_\mu = 0, \pm 1, \pm 2, ... \quad \text{sowie } \mathrm{d}^3 k = \frac{(2\pi)^3}{V}.$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{d}^3 k = (2\pi)^3/V$ das k-Raumvolumen, das ein erlaubter, durch den Wellenvektor $\vec{k}$ charakterisierter Zustand einnimmt.

(b) Berechnen Sie für N Teilchen in der kanonischen Gesamtheit im (thermodynamischen) Limes $V \to \infty$ die Geschwindigkeitsverteilung $\rho(\vec{p})$ aus der Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes Teilchen (o.B.d.A. das Teilchen 1 mit $\vec{p} = \vec{p}_1$) im Impulsraumelement $\mathrm{d}^3 p$ zu finden ($\beta = 1/k_B T$):

$$\rho(\vec{p}) = \sum_{\text{Mikrozustände } \alpha} \delta_{\vec{p},\vec{p}_1} \frac{e^{-\beta E_\alpha}}{Z}.$$

3. Zustandsdichten (2+2 Punkte)

Die Zustandsdichte in einem d-dimensionalen Würfel mit $V = L^d$ ist definiert als

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \delta\left(\epsilon - \epsilon(\vec{k})\right).$$

Dabei ist

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad \text{(Elektronen)} \qquad \text{bzw.} \qquad \epsilon(\vec{k}) = c\hbar k \quad \text{(Photonen)}$$

(a) Zeigen Sie: Für $V \to \infty$ gilt:

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \delta\left(\epsilon - \epsilon(\vec{k})\right).$$

(b) Berechnen Sie $\mathcal{N}(\epsilon)$ im (thermodynamischen) Limes für Elektronen und Photonen in $d = 1, 2, 3$ Dimensionen.