Laserphysik

WS 2018/19 **12 . Übung** **29.01.2017**

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Eigenzustände $|\,n\,\rangle$ des 1D harmonischen Oszillators (mit Masse m und Frequenz ω) sowie die zugehörigen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{\mathrm{a}}^\dagger$ und $\hat{\mathrm{a}}$.

a) Beweisen Sie mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die folgenden Rekursionsbeziehungen:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathrm{q}}\,|\,n\,\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\,m\,\omega}}\,\Big[\,\sqrt{n+1}\,|\,n+1\,\rangle\;+\;\sqrt{n}\,|\,n-1\,\rangle\,\Big] \\
\hat{\mathrm{p}}\,|\,n\,\rangle &= i\sqrt{\frac{m\,\hbar\,\omega}{2}}\,\Big[\,\sqrt{n+1}\,|\,n+1\,\rangle\;-\;\sqrt{n}\,|\,n-1\,\rangle\,\Big]
\end{aligned}$$

mit dem Ortsoperator $\hat{\mathrm{q}} = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}\,(\,\hat{\mathrm{a}} + \hat{\mathrm{a}}^\dagger\,)$ und dem Impulsoperator $\hat{\mathrm{p}} = -i\,\sqrt{m\hbar\omega/2}\,(\,\hat{\mathrm{a}} - \hat{\mathrm{a}}^\dagger\,)$.

b) Berechnen Sie (ebenfalls mit Hilfe der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren) für die Zustände $|\,n\,\rangle$ die Erwartungswerte

i) des Ortsoperators $\hat{\mathrm{q}}$,

ii) des Impulsoperators $\hat{\mathrm{p}}$,

iii) des Quadrats des Ortsoperators $\hat{\mathrm{q}}^2$ und

iv) des Quadrats des Impulsoperators $\hat{\mathrm{p}}^2$.

c) Gilt die Beziehung

$$\langle\,n\,|\,(\hat{\mathrm{a}}^\dagger)^3\,\hat{\mathrm{a}}^4\,\hat{\mathrm{a}}^\dagger\,|\,n\,\rangle \;=\; \frac{(n-1)\,(n-2)}{(n+2)\,(n+3)}\,\langle\,n\,|\,\hat{\mathrm{a}}^3\,(\hat{\mathrm{a}}^\dagger)^4\,\hat{\mathrm{a}}\,|\,n\,\rangle \quad ?$$

d) Berechnen Sie die Kommutatoren

i) $[\hat{\mathrm{n}}, \hat{\mathrm{a}}]$,

ii) $[\hat{\mathrm{n}}, \hat{\mathrm{a}}^\dagger]$,

iii) $[\hat{\mathrm{a}}, (\hat{\mathrm{a}}^\dagger)^n]$,

iv) $[(\hat{\mathrm{a}})^n, \hat{\mathrm{a}}^\dagger]$ und

v) $[\hat{\mathrm{a}}, \exp(\beta\,\hat{\mathrm{a}}^\dagger)]$

mit dem Besetzungszahloperator $\hat{\mathrm{n}} = \hat{\mathrm{a}}^\dagger\,\hat{\mathrm{a}}$ und einer Konstanten β.

Aufgabe 2

Betrachten Sie für einen 1D harmonischen Oszillator mit Masse m und Frequenz ω die Eigenzustände $|\,\alpha\,\rangle$ des Vernichtungsoperators $\hat{a}$, $\hat{a}\,|\,\alpha\,\rangle = \alpha\,|\,\alpha\,\rangle$, mit komplexen Eigenwerten α. Die Eigenzustände $|\,\alpha\,\rangle$ sollen nun in der Basis $\{\,|\,n\,\rangle\}$ der Energie- und Besetzungszahleigenzustände gemäß $|\,\alpha\,\rangle = \sum_n c_n\,|\,n\,\rangle$ entwickelt werden.

a) Bestimmen Sie die Zustände $|\,\alpha\,\rangle$, indem Sie

   i) Rekursionsrelationen zwischen den Koeffizienten c_n ermitteln,

   ii) die c_n als Funktion von c_0 ausdrücken,

   iii) den Koeffizienten c_0 über die Normierungsbedingung $\langle\,\alpha\,|\,\alpha\,\rangle = 1$ bestimmen und

   iv) die Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der eine Energiemessung am Zustand $|\,\alpha\,\rangle$ den Wert $E_n = \hbar\omega\,(n + 1/2)$ ergibt.

b) Charakterisieren Sie die Zustände $|\,\alpha\,\rangle$ bezüglich ihrer Energie, indem Sie

   i) den Erwartungswert der Energie $\langle\,E\,\rangle$,

   ii) den Erwartungswert des Energiequadrats $\langle\,E^2\,\rangle$ sowie

   iii) die sich daraus ergebende Varianz $\Delta E^2 = \langle\,E^2\,\rangle - \langle\,E\,\rangle^2$, Unschärfe $\Delta E = \sqrt{\Delta E^2}$ und relative Unschärfe $\Delta E\,/\,\langle\,E\,\rangle$ berechnen.

   iv) In welchem Sinn ist die Energie umso besser definiert desto größer $|\alpha|$ wird?

c) Charakterisieren Sie die Zustände $|\,\alpha\,\rangle$ bezüglich ihrer Orts- und Impulserwartungswerte, indem Sie

   i) den Ortserwartungswert $\langle\,q\,\rangle$,

   ii) den Impulserwartungswert $\langle\,p\,\rangle$ und

   iii) das Produkt der Orts- und Impulsunschärfen $\Delta q \cdot \Delta p$

   berechnen.