Laserphysik

WS 2018/19 **13 . Übung** **05.02.2019**

Aufgabe 1

Berechnen Sie für die Quadraturoperatoren

$$\hat{\mathrm{X}} \;=\; \frac{\hat{\mathrm{a}}+\hat{\mathrm{a}}^\dagger}{2}$$

und

$$\hat{\mathrm{Y}} \;=\; \frac{\hat{\mathrm{a}}-\hat{\mathrm{a}}^\dagger}{2i}$$

den Kommutator $[\hat{\mathrm{X}}, \hat{\mathrm{Y}}]$.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der Beziehung

$$\frac{\langle\, \hat{\mathrm{a}}^\dagger\, \hat{\mathrm{a}}^\dagger\, \hat{\mathrm{a}}\, \hat{\mathrm{a}} \,\rangle}{\langle\, \hat{\mathrm{a}}^\dagger\, \hat{\mathrm{a}} \,\rangle^2} \;=\; 1 \;+\; \frac{\Delta n^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2}$$

mit $\bar{n} \;:=\; \langle\, n \,\rangle$.

b) Berechnen Sie diesen Erwartungswert

i) für Fock-Zustände $|\, n \,\rangle$

ii) für kohärente Zustände $|\, \alpha \,\rangle$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie den Verschiebeoperator

$$\hat{D}(\alpha) = \exp[\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}].$$

a) Zeigen Sie, dass $\hat{D}(\alpha)$ unitär ist.

b) Zeigen Sie, welcher Zustand sich ergibt, wenn man $\hat{\mathrm{D}}(\alpha)$ auf den Vakuumzustand $|\,0\,\rangle$ anwendet.

Hinweis: Berechnen Sie die Wirkung von $\hat{\mathrm{D}}(\alpha)$ direkt oder schlussfolgern Sie indirekt, indem Sie den Vernichtungsoperator $\hat{\mathrm{a}}$ anwenden. In beiden Fällen benötigen Sie vermutlich die Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) Formel.

c) Zeigen Sie, dass

$$\hat{D}(-\alpha)\ \hat{a}\ \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha$$

gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die BCH-Formel.

Aufgabe 4

Gegeben sei der *verallgemeinerte Vernichtungsoperator*

$$\hat{\mathrm{A}} \ = \ \hat{\mathrm{S}}(\zeta)\ \hat{\mathrm{a}}\ \hat{\mathrm{S}}^\dagger(\zeta),$$

wobei der *Quetschoperator* $\hat{\mathrm{S}}(\zeta)$ definiert ist durch

$$\hat{\mathrm{S}}(\zeta) = \mathrm{e}^{-\frac{\zeta}{2}(\hat{\mathrm{a}}^\dagger)^2 + \frac{\zeta^*}{2}\hat{\mathrm{a}}^2}$$

mit $\zeta = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass der Quetschoperator unitär ist. Welche Form hat $\hat{\mathrm{S}}(-\zeta)$?

b) Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\hat{\mathrm{A}} \ = \ \hat{\mathrm{S}}(\zeta)\ \hat{\mathrm{a}}\ \hat{\mathrm{S}}^\dagger(\zeta) \ = \ \hat{\mathrm{a}}\cosh(r) + \hat{\mathrm{a}}^\dagger\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sinh(r) \tag{1}$$

gilt.
Hinweis:

$$\mathrm{e}^{\alpha\hat{\mathrm{C}}}\ \hat{\mathrm{B}}\ \mathrm{e}^{-\alpha\hat{\mathrm{C}}} = \hat{\mathrm{B}} + \alpha\left[\hat{\mathrm{C}}, \hat{\mathrm{B}}\right] + \frac{\alpha^2}{2!}\left[\hat{\mathrm{C}}, \left[\hat{\mathrm{C}}, \hat{\mathrm{B}}\right]\right] + \cdots$$

c) Zeigen Sie, dass der gequetschte Zustand $|\,\zeta\,\rangle \equiv \hat{S}(\zeta)\,|\,0\,\rangle$ normiert ist, wobei $|\,0\,\rangle$ der Vakuumzustand ist.

d) Berechnen Sie mit Hilfe der Gl. (1) den Erwartungswert $\langle\,\zeta\,|\,\hat{n}\,|\,\zeta\,\rangle$.

e) Berechnen Sie weiterhin $\langle\,\zeta\,|\,\hat{n}^2\,|\,\zeta\,\rangle$ und die Varianz der Photonenzahl Δn^2.