Laserphysik

WS 2018/19 **6 . Übung** **04.12.2018**

Aufgabe 1

Im inkohärenten Regime lautet die Maxwell-Blochgleichung für die Besetzungsinversion eines 2-Niveau-Systems

$$\frac{\mathrm{d}\,\Delta\mathrm{n}}{\mathrm{dt}} \;=\; -\,\frac{I}{I_s}\,\frac{\Delta n}{\tau} \;-\; \frac{n_0+\Delta n}{\tau} \qquad \text{mit} \quad \Delta n \;=\; n_2 - n_1, \qquad I_s \;=\; \frac{\hbar\omega}{2\,\sigma(\omega)\,\tau} \quad .$$

Hierbei ist I die Intensität, I_s die Sättigungsintensität, τ die Lebensdauer des Niveaus 2 und n_0 die Gesamtdichte der 2-Niveausysteme. Zeigen Sie, dass

$$\Delta n(t) \;=\; -\,n_0 \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{dt}'}{\tau}\, \exp\left[-\,\frac{t'}{\tau} \;-\; \frac{1}{I_s\,\tau} \int\limits_{t-t'}^{t} \mathrm{dt}''\; \mathrm{I(t'')} \right]$$

eine allgemeine Lösung dieser Gleichung darstellt.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Maxwell-Bloch-Gleichungen in den "rotating wave"- und "slowly varying amplitude"-Näherungen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c_g}\frac{\partial}{\partial t}\right) E(t,z) = \frac{i}{2}\,\mu_0\,\omega\,c_p\,P(t,z) \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau_p} - i\,\Delta\omega\right) P(t,z) = \frac{i}{\hbar}\,n_0\,d_{12}^2\,E(t,z)\,[\,1 - 2n_{\mathrm{ex}}(t,z)\,] \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\tau}\right) n_{\mathrm{ex}}(t,z) = \frac{i}{4\,\hbar\,n_0}\,[E(t,z)\,P^*(t,z) - E(t,z)\,P^*(t,z)\,] \quad . \tag{3}$$

Dabei gilt für die Besetzungsinversion $\Delta n(t,z) = n_0\,[\,2n_{\mathrm{ex}}(t,z) - 1\,]$ mit $n_{\mathrm{ex}}(t,z) = n_2(t,z)\,/\,n_0$ und der Gesamtzahl n_0 der Zweiniveausysteme sowie der Besetzung $n_2(t,z)$ des oberen Niveaus.

a) Berechnen Sie hieraus das lineare Absorptionsgesetz $I(z) = I(0)\,\exp[-\alpha(\Delta\omega)\,z]$ für den stationären Fall (d. h. alle Zeitableitungen verschwinden). Welche Werte haben der Absorptionskoeffizient im Maximum und die Breite der Bande?

b) Betrachten Sie nun den resonanten Fall $\Delta\omega = 0$ und die Ausbreitung eines Lichtimpulses mit einer Impulsdauer t_p, die wesentlich kürzer als die Relaxationszeiten τ_p und τ ist. Welcher Zusammenhang ergibt sich jetzt zwischen $\Delta n(t,z)$ und $|P(t,z)|^2$?

c) Die Besetzungsdifferenz wird nun mit Hilfe eines orts- und zeitabhängigen Winkels $\Psi(t,z)$ beschrieben: $n(t,z) = n_0\,\cos[\Psi(t,z)]$. Berechnen Sie die sich daraus ergebenden Ausdrücke für $P(t,z)$ und $E(t,z)$.

d) Wie groß ist im Kleinsignalfall $[\Delta n(t,z) \ll n_0]$ die Besetzungsänderung für einen rechteckförmigen Impuls mit Amplitude E_0 und Impulsdauer t_p ?

e) Selbstinduzierte Transparenz: Welcher Differentialgleichung genügt die Impulsfläche definiert als $\Theta(z) = (d_{12}/\hbar)\int_{-\infty}^{\infty} E(t,z)\,\mathrm{d}t$ als Funktion der Ortskoordinate z ?

f) Berechnen und diskutieren Sie die analytische Lösung der in e) erhaltenen Differentialgleichung.