Statistische Physik

Prof. Dr. Kurt Busch — **SoSe 2017, Blatt 12a**

04. Juli 2017

---

1. Ising-Modell mit Nächster-Nachbar-Wechselwirkung (2+2+4 Punkte)

Betrachten Sie das Ising-Modell für N wechselwirkende Spins $s = 1/2$, wobei für jeden Spin gelte

$$\hat{S}^z|\sigma\rangle = \frac{\hbar}{2}\sigma|\sigma\rangle \quad \text{mit } \sigma = \pm 1.$$

Diese Spins sind auf einem Gitter angeordnet, wobei jeder Gitterplatz K nächste Nachbarn hat (Bemerkung: K heißt Koordinationszahl des Gitters). In einem der Mikrozustände $\{\alpha\} \equiv \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N\}$ sind die Energie $E_\alpha \equiv E$ und Magnetisierungsdichte $m_\alpha \equiv m$ gegeben durch

$$E = -\frac{J}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=(\text{n.N.}i)}\sigma_i\sigma_j - h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \quad \text{mit (n.N.}i) \equiv \text{ nächster Nachbar von } i,$$

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i.$$

Dabei bezeichnen $J > 0$ bzw. h die Wechselwirkungskonstante bzw. das externe Magnetfeld (in geeigneten Einheiten).

(a) *Näherung von Bragg und Williams (1934)*:
Setzen Sie $\sigma_l = m + \Delta\sigma_l$, $\Delta\sigma_l := \sigma_l - m$ in den Ausdruck für E ein und zeigen Sie, daß $E(m, N) = -N[\frac{J}{2}Km^2 + hm]$, falls man Fluktuationsterme proportional zu $\Delta\sigma_i\Delta\sigma_j$ vernachlässigt.

(b) Bestimmen Sie die Entropie $S(m, N) = k\ln\Omega(M, N)$ für fest gewählte E, m, N.
Hinweis:
Es ist $m = M/N$, $M = N_+ - N_-$, $N = N_+ + N_-$ (N_+: Zahl der Up-Spins, N_-: Zahl der Down-Spins) und verwenden Sie die Stirling-Formel in der Form $\ln(N_+!) \approx N_+\ln N_+ + N_+$ etc.

(c) Geben Sie damit die freie Energie $F(T, m, N)$ an und minimieren Sie F bzgl. m. Zeigen Sie, daß für $h = 0$ bei einer Temperatur T_c ein Phasenübergang $m = 0 \rightarrow m \neq 0$ stattfindet und bestimmen Sie T_c.
Hinweis: Es ist

$$F(T, m, N) = N\left[-\frac{J}{2}Km^2 - hm + kT\frac{1+m}{2}\ln\frac{1+m}{2} + kT\frac{1-m}{2}\ln\frac{1-m}{2}\right].$$

2. Ising-Modell mit unendlich langreichweitiger Wechselwirkung (2+3 Punkte)

Nimmt man an, daß die Wechselwirkung J jeden Spin auf einem Gitter mit jedem anderen Spin des Gitters verbindet, so lauten Energie und Magnetisierungsdichte im Mikrozustand $(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N)$

$$E(\{\sigma_i\}) = -\frac{J}{2N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j - h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i \quad \text{und} \quad m(\{\sigma_i\}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i.$$

(a) Begründen Sie: In der kanonischen Gesamtheit ist $\langle(\Delta m)^2\rangle \propto \frac{1}{N}$ mit $\Delta m = (m - \langle m\rangle)$, und daher kann für $N \gg 1$ die Energie *ohne Näherung* geschrieben werden als

$$E(\{\sigma_i\}) = -\tilde{h}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i.$$

Wie lautet das effektive Magnetfeld $\tilde{h}$.

(b) Berechnen Sie nun $\langle m\rangle$ vermöge der kanonischen Zustandssumme und zeigen Sie, daß das System einen magnetischen Phasenübergang zeigt. Bestimmen Sie die zugehörige Übergangstemperatur T_c'.