

Statistische Physik

Prof. Dr. Kurt Busch

SoSe 2017, Blatt 2a
27. April 2017

1. Variation mit Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikator (3+2 Punkte)

Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen sind ein zentraler Aspekt vieler physikalischer Theorien - klassischer wie quantenmechanischer - da sich daraus i.A. der Gleichgewichtszustand eines Systems ergibt. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren erlaubt eine effiziente systematische Behandlung derartiger Probleme, wie es in dieser Aufgabe beispielhaft an zwei Klassikern – eine klassische und eine quantenmechanische Fragestellung – illustriert werden soll.

- (a) Betrachten Sie ein Seil der Länge $L > d$ mit homogener Massendichte $\rho = M/L$ welches an zwei Punkten, deren Abstand auf der x -Achse d beträgt, befestigt ist. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass das Seil komplett in der xz -Ebene liegt. Dementsprechend kann die Lage des Seils durch die Funktion $z(x)$ mit $x \in [-d/2, d/2]$ beschrieben werden. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage $\bar{z}(x)$ des Seils im Schwerfeld (Erdbeschleunigung g).
- (b) Bestimmen Sie das Minimum E_0 des Energiefunktionals $E[|\psi\rangle] = \langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$ unter der Nebenbedingung $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ für einen Hamiltonoperator \hat{H} , der die Energieeigenzustände $|\alpha\rangle$ hat, d.h. es gilt $\hat{H}|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle$.