Statistische Physik

Prof. Dr. Kurt Busch **SoSe 2017, Blatt 3a**
02. Mai 2017

Mit der Aufgabenfolge dieses Übungsblatts soll ein grundlegendes Problem der klassischen Statistischen Physik aufgezeigt und durch eine ad-hoc mikroskopische Betrachtung (vorläufig) gelöst werden. Dabei werden nebenbei auch einige wichtige mathematische Betrachtungen angestellt.

1. Das klassische ideale Gas: Entropie (3 Punkte)

Für das klassische ideale Gas sind folgende Zustandsgleichungen bekannt:

$$E = \frac{f}{2} NkT \quad \text{und} \quad pV = NkT$$

Dabei ist E die innere Energie, f die Zahl der mechanischen Freiheitsgrade (Translation, Schwingung, Rotation) der Atome/Moleküle aus denen das Gas besteht, N die Teilchenzahl, T die Temperatur, p der Druck, V das Volumen und k die Boltzmann-Konstante. Berechnen Sie daraus die Entropie

$$S(E,V,N) = S_0 \frac{N}{N_0} + Nk\left[\frac{f}{2}\ln\left(\frac{E}{E_0}\right) + \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) - \frac{f+2}{2}\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)\right]$$

Hinweis: Benutzen Sie die thermodynamische Fundamentalbeziehung um für die Dichten $s = S/N$, $e = E/N$, $v = V/N$ zunächst zu zeigen, dass gilt $\mathrm{d}s = \frac{1}{T}\mathrm{d}e + \frac{p}{T}\mathrm{d}v$. Verwenden Sie dieses Ergebnis um vermöge der Zustandsgleichungen den obigen Ausdruck für die Entropie herzuleiten.

2. Stirling-Formel (2 Punkte)

Beweisen Sie die Stirlingsche Näherungsformel

$$N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N ,$$

wobei e die Eulersche Zahl ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Definition von $N!$ über die Gamma-Funktion

$$N! = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^N e^{-x}$$

und berechnen Sie das Integral näherungsweise mit der Sattelpunktsmethode. Zeigen Sie hierzu, dass der Logarithmus des Integranden ein Maximum bei $x = N$ besitzt und entwickeln Sie bis zur quadratischen Ordnung in der Variablen $x - N$. Das liefert ein leicht ausrechenbares Gaußsches Integral.

3. Gibbssches Paradoxon (1+3+2 Punkte)

Betrachten Sie einen thermisch isolierten Behälter, der durch eine fixierte, isolierende Trennwand in zwei Teile $i = 1, 2$ unterteilt ist. Beide Teile enthalten klassische ideale Gase mit N_i Teilchen bei Druck p_i und Temperatur T_i.

(a) Die Trennwand sei nun verschiebbar und wärmedurchlässig. Berechnen Sie Temperatur T und Druck p im Endzustand.

(b) Die Trennwand wird nun ganz entfernt. Berechnen Sie die Änderung ΔS der Gesamtentropie falls die Gase (i) verschieden $m_1 \neq m_2$, (ii) identisch $m_1 = m_2$ sind. Wo liegt der Widerspruch?
Hinweis: Für $f = 3$ (mono-atomiges Gas) ergibt sich mit den Ergebnissen von Aufgabe 1 sowie unter Verwendung von $S_0 = kN_0$, $E_0 = \frac{3}{2}NkT_0$ und der Einführung einer materialspezifischen Bezugsenenergie $kT_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$ ($k_0 \sim 1/a_0$ mit dem Bohrschen Radius a_0, m Masse der Teilchen) für eine konstante Teilchenzahl $N = N_0$ die Entropie des klassischen idealen Gases zu

$$S(T, V, N) = Nk \left[\ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + \frac{3}{2} \left(1 + \ln \left(\frac{2mkT}{\hbar^2 k_0^2} \right) \right) \right].$$

(c) Zeigen Sie, daß mit der korrigierten Entropie $\tilde{S}(T, V, N) = S(T, V, N) - k \ln(N!)$ der Widerspruch verschwindet.
Hinweis: Verwenden Sie die Stirlingsche Formel