HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR PHYSIK

AG THEORETISCHE OPTIK & PHOTONIK
WWW.PHYSIK.HU-BERLIN.DE/TOP/TEACHING

Statistische Physik

Prof. Dr. Kurt Busch **SoSe 2017, Blatt 5a**
23. Mai 2017

---

1. Modell eine Gummimoleküls (2+2+2+2 Punkte)

Betrachten Sie ein Modell eines Polymermoleküls, das aus N Kettengliedern einer geraden Kettenlinie, die unabhängig voneinander gestreckt (–) oder geknickt ($\wedge$) werden können besteht. Das Knicken eines Gliedes verkleinert die Gesamtlänge L der Kette und kann Energie kosten oder freisetzen. Also setzt man:
Energie pro Kettenglied: ϵ_- bzw. $\epsilon_\wedge$, Länge eines Gliedes: l_- bzw. $l_\wedge < l_-$.

(a) Es wirke die äußere Kraft K entlang der Molekülachse. bestimmen Sie die Zustandsdichte der kanonischen Druckgesamtheit

$$Z(T, N, K) = \sum_\alpha e^{-\beta(E_\alpha - KL_\alpha)},$$

wobei $\beta = 1/kT$ ist. *Hinweis*: Beachten Sie die Entartung der Mikrozustände und verwenden Sie den binomischen Satz.

(b) Berechnen Sie die freie Enthalpie $G(T, N, K) = -kT\ln(Z)$ und daraus die mittlere Länge L des Polymermoleküls. Welches Vorzeichen hat der thermische Ausdehnungskoeffizient $\alpha = \frac{\partial L}{\partial K}|_{K=0}$ für $\epsilon_- < \epsilon_\wedge$ bzw. für $\epsilon_- > \epsilon_\wedge$.

(c) Es sein nun $L =$ const. festgehalten (kanonische Gesamtheit). Bestimmen Sie die Zustandssumme

$$Z(T, N, K) = \sum_{\tilde{\alpha}} e^{-\beta E_{\tilde{\alpha}}},$$

wobei wieder $\beta = 1/kT$ ist. Berechnen Sie damit die freie Energie $F(T, N, L)$
Hinweis: $L =$ const. ist eine Randbedingung an die Zustände $\tilde{\alpha}$ und verwenden Sie die Stirling-Formel.

(d) Berechnen Sie die mittlere Kraft $K(T, N, L)$ auf das Molekül.
Hinweis: Es gilt $\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S + K\mathrm{d}L$, woraus folgt $\mathrm{d}F = ...$

2. Barometrische Höhenformel (4 Punkte)

Die klassische Hamiltonfunktion von N Teilchen der Masse m (ideales Gas) unter dem Einfluß des (näherungsweise homogenen) Gravitationsfeldes ist gegeben durch

$$H(\{\vec{p}_i, \vec{r}_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} - m\vec{g} \cdot \vec{r}_i \right),$$

wobei $\vec{g} = -g\hat{e}_z$ ist (g: Erdbeschleunigung).
Zeigen Sie mit Hilfe der kanonischen Gesamtheit, dass die Verteilung der Ortskoordinate eines herausgegriffenen Teilchens der Barometrischen Höhenformel

$$w(\vec{r}) = \text{const.} \times e^{m\vec{g}\cdot\vec{r}/kT}$$

genügt. Leiten Sie daraus und aus der idealen Gasgleichung eine Beziehung für die Höhenabhängigkeit des Luftdrucks ab.
Hinweis:
Beachten Sie die Gibbs-Korrektur (siehe Übungsblatt 3), die sich im konkreten Fall darin äußert, dass die 'naive' Zustandssumme mit einem Faktor $1/N!$ korrigiert wird.