Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik

AG Theoretische Optik & Photonik
www.physik.hu-berlin.de/top/teaching

Statistische Physik

Prof. Dr. Kurt Busch

SoSe 2017, Blatt 7a
30. Mai 2017

---

1. Harmonische Kette (3+3 Punkte)

Betrachten Sie $2N$ identische Punkt-Massen m, die sich reibungsfrei auf der x-Achse bewegen und abwechselnd mit unterschiedlichen Federn $K > G$ verbunden sind (siehe Skizze).

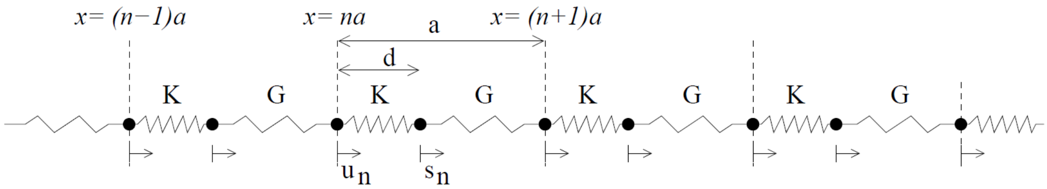

Fig.: Skizze einer harmonischen Kette aus $2N$ identischen Punkt-Massen m mit alternierenden Federn (Federkonstanten G und $K > G$).

Zunächst sollen die klassischen Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen u_n und s_n aus den jeweiligen Ruhelagen bei $x = na$ und $x = na + d$ gelöst werden. Die Lagrange-Funktion lautet

$$
\begin{aligned}
L(u_n, s_n, \dot{u}_n, \dot{s}_n) &= T - U \\
U &= \frac{K}{2} \sum_n (u_n - s_n)^2 + \frac{G}{2} \sum_n (u_{n+1} - s_n)^2 \\
T &= \ldots
\end{aligned}
$$

(a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen. Zeigen Sie dann für den Ansatz

$$u_n(t) = u e^{i(kx-\omega t)}, s_n(t) = s e^{i(kx-\omega t)} \quad \text{mit} \quad x = na,$$

daß periodische Randbedingungen $u_{n+N}(t) = u_n(t)$, $s_{n+N}(t) = s_n(t)$ auf die Einschränkung

$$k = \frac{2\pi}{a}\frac{m}{N} \quad \text{mit} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

führen und daß für eine eindeutige Lösung $-\pi/a < k \leq \pi/a$ gelten muß.

(b) Bestimmen Sie nun die Eigen-Frequenzen $\omega_+(k)$, $\omega_-(k)$ der Eigenmoden der Kette und geben Sie jeweils auch s/u an. Wie verhalten sich $\omega_\pm(k)$ und s/u für kleine $|k| \ll \pi/a$? Was bedeutet das Ergebnis anschaulich? Skizzieren Sie $\omega_\pm(k)$ für alle erlaubten k. Wie viele akustische ($-$) und optische ($+$) Eigenmoden besitzt die Kette?

2. Zustandsdichte (3 Punkte)

Eine brauchbare Näherung ist offenbar $\omega_-(k) \approx c|k|$, $\omega_+(k) \approx \omega_0 = \text{const.}$

(a) Berechnen Se damit die Zustandsdichten

$$D_\pm(\omega) = \overline{\sum_k} \delta\left(\omega - \omega_\pm(k)\right),$$

als Funktion von c, ω_0.
Dabei umfaßt die Summation nur die erlaubten k-Werte aus der 1. Aufgabe.

(b) Für ein drei-dimensionales Kristallgitter mit insgesamt N Elementarzellen ($L^3 = Na^3$), die jeweils zwei Massen enthalten, gilt $\omega_-^s(\vec{k}) = c|\vec{k}|$, $\omega_+^s(\vec{k}) = \omega_0$, wobei $s = 1, 2, 3$ und $-\pi/a < k_i \leq \pi/a$ $(i = x, y, z)$ mit $k_i = (2\pi/L)m_i$ $(m_i = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
Berechnen Sie die Zustandsdichten

$$D_\pm(\omega) = \overline{\sum_k} \sum_s \delta\left(\omega - \omega_\pm(k)\right)$$

für kleine Frequenzen $\omega \ll c/a$, ω_0.

3. Phononen (3+3 Punkte)

Die klassischen Eigenmoden der Kette bzw. des Kristalls werden nun als unabhängige, unterscheidbare, quantenmechanische harmonische Oszillatoren aufgefaßt.

(a) Geben Sie die kanonische Zustandssumme Z an und bestimmen Sie die (innere) Energie E als Funktion der Zustandsdichten $D_\pm(\omega)$. Worin besteht der Unterschied zum idealen Bose-Gas?

(b) Berechnen Sie, ausgehend von den Ergebnissen der 2. Aufgabe, die spezifische Wärme

$$c_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$$

für kleine Temperaturen $kT \ll \hbar c/a$, $\hbar\omega_0$ für Kette und Kristall.