Statistische Physik

Prof. Dr. Kurt Busch **SoSe 2017, Blatt 8a**
06. Juni 2017

---

1. Ideales Fermi-Gas mit Spin (2+2+3 Punkte)

Betrachen Sie N freie Elektronen mit Spin 1/2, die sich in einem Volumen $V = L^3$ befinden. In einem externen Magnetfeld B haben diese Elektronen eine Dispersionsrelation

$$\epsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu_B B \sigma,$$

wobei σ die Werte $\sigma = \pm 1$ annehmen kann und μ_B das Bohr'sche Magneton bezeichnet.

(a) Geben Sie für die *großkanonische* Gesamtheit die Mikrozustände an und berechnen Sie darauf aufbauend die Zustandssumme und das große Potential Ω.

(b) Zeigen Sie, daß die Magnetisierung M gegeben ist durch

$$M = -\frac{\partial \Omega}{\partial B} = \mu_B V \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon N(\epsilon) \left[f(\epsilon - \mu - \mu_B B) - f(\epsilon - \mu + \mu_B B) \right].$$

(c) Berechnen Sie die *kanonische* Suszeptibilität

$$\chi(T, V, N) = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0} = \chi(0) \left[1 + a \, (kT)^2 + O(kT)^4 \right],$$

für $kT \ll \epsilon_{\mathrm{F}}$ bis zur Ordnung T^2, d.h. bestimmen Sie im obigen Ausdruck die Größen $\chi(0)$ und a.
Hinweis:
Beginnen Sie mit $\chi(T, V, \mu)$ und bestimmen Sie $\mu(T, V, N)$ vermittels einer Sommerfeld-Entwicklung (z.B. wie in der Vorlesung).

2. Modell für weiße Zwerge (2+1+2+1+3 Punkte)

Als weißen Zwerg bezeichnet man das Endstadium eines Sterns mittlerer Masse (also z.B. unserer Sonne), welches erreicht wird nachdem der Stern seinen nuklearen Brennstoff vollständig aufgebraucht hat. In einem einfachen Modell besteht er aus einem nicht-wechselwirkenden Elektronengas und einem Ionenhintergrund, der für Ladungsneutralität und den Zusammenhalt des Stern durch Gravitation sorgt. Ein typischer weißer Zwerg hat eine Elektronendichte $n = 10^{30}\ 1/\mathrm{cm}^3$ und die Masse $M = 10^{30}$ kg. (Bemerkung: Dies entspricht in etwa der halben Sonnenmasse $M_\odot = 1,986 * 10^{30}$ kg.) Aufgrund der hohen Dichte bewegt sich ein großer Anteil der Elektronen relativistisch, d.h. es gilt die Energie-Impuls-Beziehung $\epsilon(\vec{p}) = c\sqrt{m_e^2c^2 + p^2}$ (m_e: Ruhemasse der Elektronen).

(a) Berechnen Sie den Fermi-Impuls p_F des Elektronengases in Abhängigkeit der Elektronendichte n. Schätzen Sie ab, oberhalb welcher Dichte n sich die Elektronen relativistisch bewegen, d.h. $p_\mathrm{F} > m_e c$.

(b) Die Temperatur eines jungen weißen Zwergs beträgt in etwa $T \simeq 10^7$ K. Berechnen Sie die Fermi-Energie ϵ_F des Elektronensystems für die oben angegebene Dichte des Elektronengases und zeigen Sie $\epsilon_\mathrm{F} \gg kT$. Daher setzen wir im folgenden $T = 0$.

(c) Berechnen Sie die (innere) Energie E des Elektronensystems in Abhängigkeit vom Radius R des weißen Zwergs, einmal für den nichtrelativistischen Fall $p_\mathrm{F} \ll m_e c$ und einmal für den ultrarelativistischen Fall $p_\mathrm{F} \gg m_e c$. Verwenden Sie dabei die Energie-Impuls-Beziehungen

$$\epsilon(\vec{p}) = m_e c^2 + \frac{p^2}{2m_e} \qquad \text{(nichtrelativistisch)}$$

$$\epsilon(\vec{p}) = cp \qquad \text{(ultrarelativistisch).}$$

(d) Geben Sie den Druck $p = -\left(\partial E/\partial V\right)_N$ des Elektronensystems, den sogenannten 'Pauli-Druck' an.

(e) Betrachten Sie nun die Gesamtenergie $E_\mathrm{Total}(R) = E(R) + E_\mathrm{Grav}(R)$ des Sterns, die sich aus der (inneren) Energie $E(R)$ und der Gravitationsenergie $E_\mathrm{Grav}(R) = -GM^2/R^2$ (G: Newton'sche Gravitationskonstante) zusammen setzt.
Skizzieren Sie $E_\mathrm{Total}(R)$ und beachten Sie dabei die Näherungen: Nichtrelativistisch für niedrigen Druck (große Radius R) und ultrarelativistisch für großen Druck (kleiner Radius R).
Was ist (qualitativ) die Bedingung an $E(R)$, so daß ein Radius R existiert bei dem der Stern stabil ist? Zeigen Sie, daß der weiße Zwerg für Massen größer als eine kritische Masse M_c nicht stabil sein kann und bestimmen Sie M_c.
(Bemerkung: M_c heißt nach seinem Entdecker Chandrasekhar-Masse. Für $M > M_c$ kontrahiert der Stern weiter und endet als Neutronenstern.)

Hinweis:

$$\hbar = 1,05 * 10^{-34}\ \mathrm{kg\ m^2\ sec^{-1}} \qquad \text{(Planck'sche Konstante)}$$

$$k = 1,38 * 10^{-23}\ \mathrm{kg\ m^2\ sec^{-2}\ K^{-1}} \qquad \text{(Boltzmann-Konstante)}$$

$$c = 3 * 10^8\ \mathrm{m\ sec^{-1}} \qquad \text{(Vakuumlichtgeschwindigkeit)}$$

$$m_e = 9,11 * 10^{-31}\ \mathrm{kg} \qquad \text{(Elektronenmasse)}$$