Statistische Physik

Prof. Dr. Kurt Busch

SoSe 2017, Blatt 9a
13. Juni 2017

---

1. Bose-Gas in zwei Dimensionen (3+3 Punkte)

Betrachen Sie ein zwei-dimensionales Bose-Gas mit Flächendichte $n = N/A$ und der Zustandsdichte $N(\epsilon) = m/(2\pi\hbar^2)$.

(a) Berechnen Sie das chemische Potential $\mu(T)$. Diskutieren Sie das Verhalten bei tiefen und hohen Temperaturen und skizzieren Sie $\mu(T)$. Tritt eine Bose-Einstein-Kondensation auf? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Berechnen Sie die spezifische Wärme $c_{A,N}$ bei konstanter Fläche A und konstanter Teilchenzahl N sowohl für tiefe als auch für hohe Temperaturen. Berücksichtigen Sie dabei, daß μ von T abhängt.

Hinweis: Bose-Integrale

$$
\begin{aligned}
B_\nu(\alpha) &= \int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{x^{\nu-1}}{e^{x-\alpha}-1} \quad \text{mit} \quad \alpha \leq 0, \nu \geq 1, \\
\frac{\partial B_\nu(\alpha)}{\partial \alpha} &= (\nu - 1) B_{\nu-1}(\alpha), \\
B_1(\alpha) &= -\ln\left(1 - e^\alpha\right), \\
B_\nu(0) &= \Gamma(\nu)\zeta(\nu), \\
\zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6},
\end{aligned}
$$

wobei $\Gamma(z)$ bzw. $\zeta(z)$ die Gamma- bzw. die (Riemannsche) Zeta-Funktion bezeichnen.

2. Spurbildung (2+2 Punkte)

Zeigen Sie, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ gilt:

(a) Die Spurbildung ist invariant unter zyklischer Vertauschung

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right\} = \mathrm{Tr}\left\{\hat{C}\hat{A}\hat{B}\right\} = \mathrm{Tr}\left\{\hat{B}\hat{C}\hat{A}\right\}.$$

(b) Die Spurbildung

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{A}\right\} = \sum_\alpha \langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle,$$

ist unabhängig von der Wahl der orthonormierten Basis $|\alpha\rangle$.

3. Zustandsoperator für Spinsysteme (1+2+2+1 Punkte)

Gegeben sei ein gemischter Zustand aus den Eigenzuständen $|\uparrow_z\rangle$ des Spin-$\frac{1}{2}$-Operators in z-Richtung und $|\uparrow_x\rangle$ des Spin-$\frac{1}{2}$-Operators in x-Richtung mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $p = 0,5$.

(a) Bestimmen Sie $|\uparrow_x\rangle$ in der Basis $\{|\uparrow_z\rangle, |\downarrow_z\rangle\}$.

(b) Wie lautet der Zustandsoperator $\hat{W}$ in Matrixdarstellung bzgl. der Eigenzustände von $\hat{\sigma}_z$?

(c) Bestimmen Sie die Eigenzustände von $\hat{W}$ in der Basis der Eigenzustände von $\hat{\sigma}_z$.

(d) Berechnen Sie die Entropie $S = -k\mathrm{Tr}\left\{\hat{W}\,\ln\hat{W}\right\}$ des gemischten Zustands.